c/9 رياضة محاضرة (1)

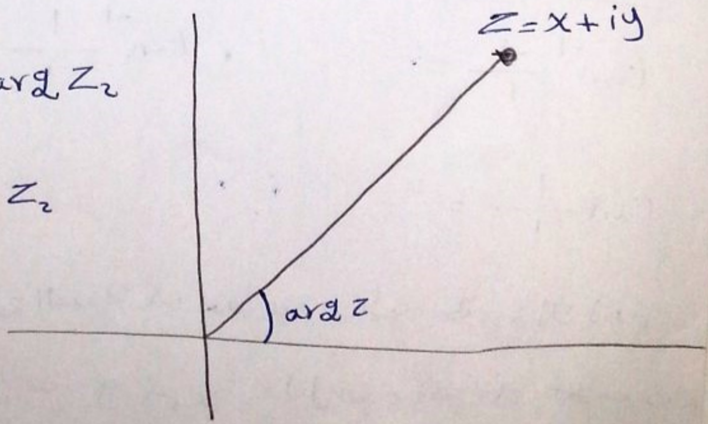
the Complex number

$$Z = x + iy$$

(3) argument of Complex

← هى الزاوية المحصورة بين الخط الواصل بين نقطة الأصل ومحور السينات وخواص هذه الحالة مثل ~~خ~~خواص اللوغاريتمات

(ضرب جوة جمع بره والقسمة جوه وطرح بره وهات عليها واطرح)



(1) $\arg(Z_1 Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$

(2) $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$

(3) $\arg Z^n = n \arg Z$

$$\arg Z = \tan^{-1} Z$$

$\boxed{\text{Ex}}$ find modulus and argument for

ⓐ $\dfrac{(1+i)^3}{(-1-i)^2\,(1-i)^4}$ ⓑ $\dfrac{(1+i)^3}{(2+5i)\,(3+6i)^2}$

a)

→ modulus

$$\left|\frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2(1-i)^4}\right| = \frac{|(1+i)^3|}{|(-1-i)^2(1-i)^4|} = \frac{|1+i|^3}{|-1-i|^2\,|1-i|^4}$$

$x=1$ $y=1$

$x=-1$ $y=-1$ $x=1$ $y=-1$

$$= \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^2\,(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

argument

$\tan^{-1}\dfrac{-1}{1} =$ ، $\tan^{-1}\dfrac{1}{-1} =$ ، $\tan^{-1}\dfrac{-1}{-1} =$

$\tan\dfrac{1}{1} =$

← نلاحظ أننا الآن لم نحسب سعة العدد المركب بطريقة خاطئة وذلك لعدم التمييز بين الإشارة هل هي مع y أم x ولحل هذه المشكلة نحذف الإشارات ونحسب ($\tan^{-1}$) ونحدد ربع الزاوية مرفقة y ، x

لو كانت في الربع الثاني ⇐ $\pi - \theta$ ، الربع الثالث ⇐ $\pi + \theta$

أما إذا كانت الربع الأول أو الرابع نضع القيمة كما هي

Lec 1

$$\arg\left(\frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2(1-i)^4}\right)$$

$$= \arg(1+i)^3 - \arg\left[(-1-i)^2(1-i)^4\right]$$

$$= 3\arg(1+i) - 2\arg(-1-i) - 4\arg(1-i)^4$$

الربع الأول $x=1$ $y=1$; $x=-1$, $y=-1$ الثالث $\tan^{-1}\frac{1}{1}$; $x=1$ $y=-1$ الربع الرابع $\tan^{-1}\frac{1}{-1}=-45$

$$= 3\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\boxed{Ex}$ if $|z| = 2$ show that $2 \leq |z-4| \leq 6$

$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ← نستخدم

$|z-4| \leq |z| + |4| = 2 + 4$

$|z-4| \leq 6 \longrightarrow (1)$

We use ⇒ $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2|$ ←

$|z-4| = |-(4-z)| = |4-z|$

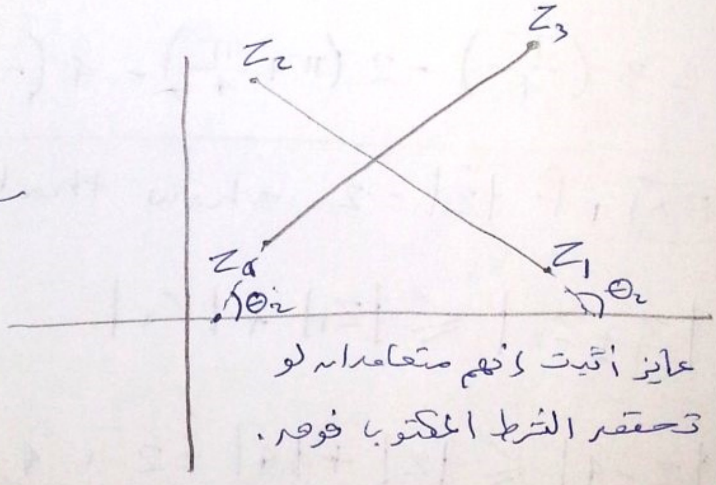
$$|4| - \underset{2}{|z|} \leq |4 - z|$$

$$2 \leq |z - 4| \longrightarrow ②$$

من ١ ، ٢ ينتج المطلوب

$\boxed{EX:3}$ Prove that if the line Joining the points Z_1, Z_2 and Z_3, Z_4 are $\underbrace{\text{pependicular}}_{\text{متعامدان}}$ iff then the

$$\underset{\text{Real}}{Re}\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4}\right) = 0$$



عايز أثبت إنهم متعامدان لو تحقق الشرط المكتوب فوق.

$$\arg(Z_1 - Z_2) = \theta_1$$

$$\arg(Z_3 - Z_4) = \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(Z_1 - Z_2) - \arg(Z_3 - Z_4) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أي إن $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ تقع على محور y

$$\therefore \operatorname{Re}\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right) = 0$$

ممكن توضيح

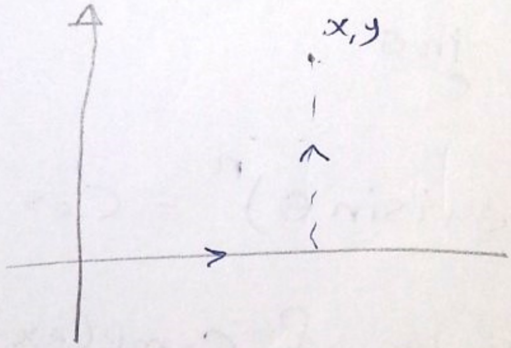
ممكن توضح المسألة بالعكس لكن نعرف إن $Re=0$ ⇐ الخطان متعامدان

* Polar Form of Complex number:-

← لو عايز أوصل للنقطة (x,y)

فنحدد بعد ونمشي (Qartizium)

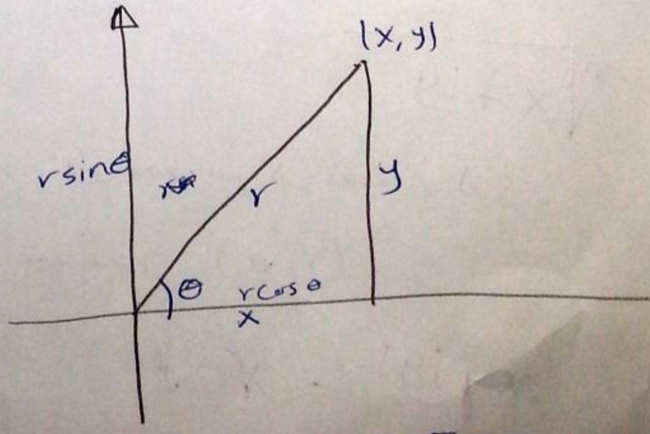
أو نحدد زاوية ونمشي طول (Polar)



$r = |z| \quad , \quad \theta = \arg z$

$z = x + iy$

$z = r\left[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\right]$



$$z = r\left[\cos(\theta \pm 2n\pi) + i\sin(\theta \pm 2n\pi)\right]$$

$$e^{i(\text{أي حاجة})} = \cos(\text{أي حاجة}) + i\sin(\text{أي حاجة})$$

$$Z = r\,e^{i(\theta \pm 2n\pi)}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

→ De Mouver theorem

$$Z = e^{i\theta} \rightarrow Z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Z^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

⇒ Roots of Complex number :-

$$\sqrt[n]{x+iy}$$

← لكى نوجد فكرة إيجاد الجذر لأى عدد مركب نحتاج لفكرة
تحصل الجمع ع (x,y) إلى ضرب فنستخدم (r,θ)

$$\cancel{(x+iy)^n = r^n}$$

$$x+iy = r\, e^{i(\theta \pm 2K\pi)}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right)}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$K = 0, 1, \ldots, n-1$ $\qquad$ $K \leftarrow$ تحدد عدد الجذور.

EX: Find the roots of $\sqrt[3]{1+i}$

Sol

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi K}{3}\right)\right]$$

$K = 0, 1, 2$ $\quad$, $x = 1$, $y = 1$

$r = \sqrt{2}$ $\quad$ $\theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{6}} \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi K}{3}\right)\right]$$

$k=0$

$$Z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right] =$$

$K=1$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$K=2$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

$\boxed{8}$ Lec 1